

Een experimenteel onderzoek naar de spanningsoverdracht van een eerste en tweede orde RC -filter

Pols, C.F.J., de Groot, H.B.*

Applied Physics, Delft University of Technology, Lorentzweg 1, 2628 CJ Delft.

(Dated: March 4, 2024)

Het RC -filter is een veelgebruikt laagdoorlaatfilter voor het onderdrukken van hoogfrequente signalen. Door twee filters in serie te schakelen kan een tweede orde filter verkregen worden, maar de theorie van niet ideale hogere orde filters wordt snel complex. Daarom is het doel van dit onderzoek om de eigenschappen van het tweede orde laagdoorlaatfilter experimenteel te bepalen en te vergelijken met het eerste orde filter. Daartoe wordt de spanningsoverdracht van beide filters bepaald als functie van de frequentie. De resultaten laten zien dat het tweede orde filter hoogfrequente signalen sterker onderdrukt dan het eerste orde filter. Alle gevonden fitparameters zijn niet strijdig met het geïdealiseerde theoretisch model. Bij het eerste orde filter is binnen de onzekerheidsmarge een systematische fout waargenomen bij hoge frequenties. Vervolgonderzoek moet uitwijzen of de theorie in dat gebied ook geldig is.

I. INTRODUCTIE

Hoogfrequente signalen zorgen regelmatig voor verstoringen in elektronische meetsystemen. Het is dan wenselijk om deze signalen te filteren met een laagdoorlaatfilter. Het eenvoudigste passieve filter bestaat uit een weerstand in serie met een condensator: het RC -filter. Omdat de condensator in de limiet van hoge frequenties als weerstandsloze draad beschreven kan worden, zorgt alleen een laagfrequent signaal voor spanning over deze condensator. Door meerdere van deze filters in serie te schakelen, kan een hogere orde filter verkregen worden. Hoewel het gedrag van deze systemen onder ideale omstandigheden goed te beschrijven is, kunnen er in de praktijk onregelmatigheden voorkomen wanneer de componenten niet ideaal zijn. Daarom is het doel van dit onderzoek om de karakteristiek van de spanningsoverdracht van een eerste en tweede orde filter experimenteel te bepalen en te vergelijken.

De spanningsoverdracht van de filters wordt experimenteel bepaald door de uitgangsspanning over de condensator te meten bij verschillende frequenties boven en onder de cut-off frequentie. Het theoretisch model wordt vervolgens gefit aan de verkregen data.

II. THEORETISCHE ACHTERGROND

Een condensator is een component waarin lading wordt opgeslagen. In het meest eenvoudige geval bestaat deze uit twee parallelle platen. Wanneer er stroom door de condensator loopt, bouwt er een ladingsverschil op waardoor het opladen minder snel gaat. De spanning $V(t)$ (in V) over de condensator in serie met een weerstand tijdens het opladen met een constante bronspanning wordt gegeven door

$$V(t) = V_0 e^{t/\tau} \quad (1)$$

waar V_0 (in V) de aangeboden spanning is, en τ (in s) de RC -tijd gegeven door $R \cdot C$, met R de weerstandswaarde van de in serie geschakelde Ohmse weerstand (in Ω) en C de capaciteit van de condensator (in C/V of F) [1].

Wanneer de spanningsbron een wisselspanning aanbiedt zal de condensator bij lage frequenties opladen en een tegenspanning geven waardoor deze minder snel oplaadt. Bij hoge frequenties zal de condensator zich echter gaan gedragen als weerstandsloze draad (de impedantie convergeert naar 0). De karakteristieke frequentie die de overgang van het ene naar het andere domein beschrijft is de zogenaamde cut-off frequentie:

$$f_c = \frac{1}{2\pi RC}. \quad (2)$$

Dit is de frequentie waar het vermogen gehalveerd is, of de verhouding tussen de gemiddelde spanning over de condensator en de ingangsspanning $1/\sqrt{2} \approx 0.71$ is. Deze verhouding kan beschreven worden met

$$\frac{V_C}{V_{in}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi f RC)^2}} \quad (3)$$

waar f (Hz) de frequentie van de ingangsspanning is [2]. In de limiet van oneindige frequentie zeggen we dat de overdracht afneemt met 20 dB/decade. Door twee van deze RC -filters in serie te schakelen kan een tweede orde filter verkregen worden waar de overdracht afneemt met 40 dB/decade. De overdracht neemt dan dus twee keer zo snel af.

III. METHODE

A. Experimentele Opstelling

Voor de metingen aan het eerste en tweede orde filter wordt gebruik gemaakt van het circuit zoals schematisch weergegeven in Figuur 1. Het eerste orde filter bestaat uit een weerstand $R_0 = 103.5 \pm 0.1 \Omega$ en een condensator

* doeternietoe@tudelft.nl

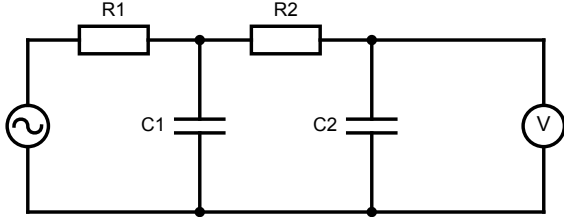
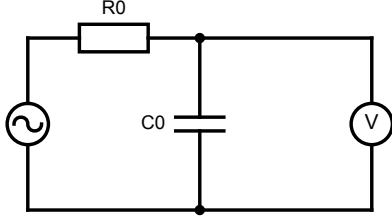


FIG. 1. Schematische weergave van de circuits. (boven) De functiegenerator (Keysight EDU33212AA) staat in serie met de weerstand $R0$ en de condensator $C0$. De spanning over de condensator wordt gemeten met de oscilloscoop (Keysight EDUX1052A). (onder) De uitgangsspanning van het eerste filter bestaande uit $R1$ en $C1$ wordt gefilterd door $R2$ en $C2$. De spanning over $C2$ wordt gemeten met de oscilloscoop.

$C0 = 3.42 \pm 0.08 \mu\text{F}$. De spanning over de functiegenerator (V_{in}) en de uitgangsspanning V_{out} over de condensator worden met de oscilloscoop gemeten. In het tweede orde filter staat over de uitgang van het eerste filter met $R1 = 103.5 \pm 0.1 \Omega$ en $C1 = 2.19 \pm 0.07 \mu\text{F}$ een tweede filter met $R2 = 100.3 \pm 0.1 \Omega$ en $C2 = 0.96 \pm 0.01 \mu\text{F}$. De uitgangsspanning wordt dan over $C2$ gemeten.

Deze waarden voor $R0$ en $C0$ zijn zo gekozen dat de cut-off frequentie van het filter rond 1 kHz ligt. De oscilloscoop en functiegenerator werken namelijk goed enkele ordes boven en onder deze frequentie. De waarden voor $R1$, $R2$, $C1$ en $C2$ zijn zo gekozen dat het systeem een vergelijkbare cut-off frequentie heeft als het eerste orde filter wat handig is voor het vergelijken van de twee filters.

Alle componenten kunnen ideaal worden beschouwd. De interne weerstand van de oscilloscoop is namelijk veel groter dan de impedantie van de condensator. Ook is de capaciteit van de BNC-kabels verwaarloosbaar ten opzichte van de gebruikte condensatoren. De weerstand van de bedrading is verwaarloosbaar ten opzichte van de gebruikte Ohmse weerstand.

B. Meetprocedure

De spanningsoverdracht van beide filters wordt bepaald door de peak-to-peak spanning van het ingangssignaal en het uitgangssignaal te meten met de oscilloscoop. De frequentie varieert tussen 10 Hz en 100 kHz met stapgrootte factor 1.5. Dat zorgt voor voor een gelijke verdeling van de meetpunten op een logaritmische schaal met een bereik ver boven en onder de cut-off frequentie.

C. Data-analyse

De spanningsoverdracht is gelijk aan de verhouding tussen de peak-to-peak spanning van het ingangssignaal en het uitgangssignaal. Voor het doorrekenen van de onzekerheden wordt de calculus methode toegepast. De onzekerheid in de meetwaarden volgt uit de specificaties van de gebruikte apparatuur. Om de overeenstemming tussen de theorie en het experiment te onderzoeken wordt ook een theoretisch model gefit met behulp van de least-squares methode. Voor het eerste orde filter fitten we vergelijking 3 in de vorm

$$V_{\text{gain}} = \frac{1}{\sqrt{1 + (2\pi f\alpha)^2}} \quad (4)$$

met α als onbekende. We verwachten $\alpha \approx R0 \cdot C0$. Voor het tweede orde filter fitten we de functie

$$V_{\text{gain}} = \frac{1}{\sqrt{(2\pi f\beta)^2 + (1 - 2\pi^2 f^2 \gamma)^2}} \quad (5)$$

met β en γ onbekend. We verwachten $\beta \approx R1 [C1 + C2] + R2 \cdot C2$ en $\gamma \approx R1 \cdot R2 \cdot C1 \cdot C2$. In de fit wordt een initiële schatting van de verwachte orde grootte gegeven.

IV. RESULTATEN

In Figuur 2 spanningsoverdracht van het eerste en tweede orde filter uitgezet tegen de frequentie. Bij het eerste orde filter is vergelijking 4 gefit. De gevonden parameter is $\alpha = (3.52 \pm 0.02) \cdot 10^{-4} \text{ s}$. Deze fit beschrijft de data aan de ene kant goed omdat de fit door de foutvlaggen gaat, maar aan de andere kant liggen de datapunten bij hoge frequenties systematisch boven de fit.

Bij de data van het tweede orde filter is vergelijking 5 gefit. De gevonden parameters zijn $\beta = (4.18 \pm 0.02) \cdot 10^{-4} \text{ s}$ en $\gamma = (2.08 \pm 0.08) \cdot 10^{-8} \text{ s}^2$. De fit gaat door alle foutvlaggen en er is geen duidelijke systematische fout aanwezig.

Onder de cut-off frequentie is de overdracht van beide filters ongeveer gelijk aan 1, zoals verwacht. Rond de cut-off frequentie hebben beide filter een vergelijkbare overdracht tussen de 0.2 en 1. Ver boven de cut-off frequentie

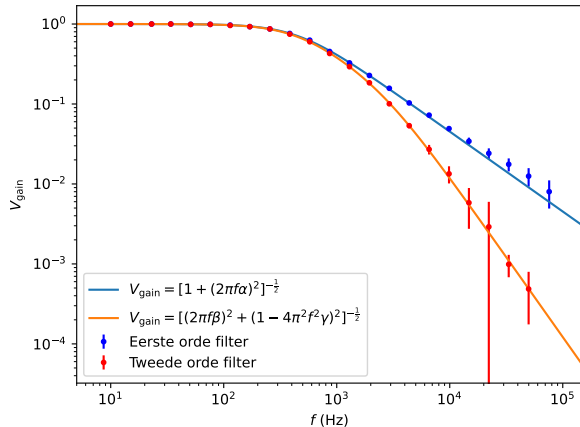


FIG. 2. De spanningsoverdracht V_{gain} is uitgezet tegen de frequentie voor het eerste en tweede orde filter. Het theoretisch model is gefit op de data. De optimale fitparameter bij het eerste orde filter is $\alpha = (3.52 \pm 0.02) \cdot 10^{-4}$ s. Bij het tweede orde filter zijn de gevonden fitparameters $\beta = (4.18 \pm 0.02) \cdot 10^{-4}$ s en $\gamma = (2.08 \pm 0.08) \cdot 10^{-8}$ s².

wordt het verschil tussen de filters aanzienlijk: De helling van het tweede orde filter is ongeveer twee keer zo groot als de helling van het eerste orde filter.

V. DISCUSSIE

Voor het eerste orde filter is de gevonden parameter $\alpha = (3.52 \pm 0.02) \cdot 10^{-4}$ s niet strijdig met de verwachte waarde van $R0 \cdot C0 = (3.53 \pm 0.09) \cdot 10^{-4}$ s op basis van de gemeten capaciteit en weerstand. Het valt wel op dat de datapunten met een hoge frequentie systematisch boven de fitlijn liggen. Een mogelijke oorzaak voor dit resultaat is het gebruik van de least-squares methode in combinatie met een bereik van enkele ordes. Hierdoor is het residue van deze meetpunten in absolute zin kleiner dan relatief. Dit kan opgelost worden door het residue te wegen naar de onzekerheid, of door het logaritme te fitten. De restrictieve vorm van de fitfunctie legt de helling van de fitlijn in Figuur 2 eigenlijk al vast. In vervolgonderzoek zou een extra vrijheidsgraad in de fitfunctie gebruikt kunnen worden om deze helling verder

te onderzoeken.

Voor het tweede orde filter is de gevonden fitparameter $\beta = (4.18 \pm 0.02) \cdot 10^{-4}$ s ook niet strijdig met de verwachte waarde van $R1[C1 + C2] + R2 \cdot C2 = (4.22 \pm 0.08) \cdot 10^{-4}$ s. Ook $\gamma = (2.08 \pm 0.08) \cdot 10^{-8}$ s² is niet strijdig met de volgens de theorie verwachte waarde $R1 \cdot R2 \cdot C1 \cdot C2 = (2.18 \pm 0.08) \cdot 10^{-8}$ s². In tegenstelling tot het eerste orde filter is er geen systematische afwijking zichtbaar bij deze fit. De relatieve onzekerheid in de datapunten is wel groter. De uitgangsspanning is door de sterke onderdrukking namelijk zo klein dat deze minder nauwkeurig te meten is.

De resultaten zijn voldoende nauwkeurig om zowel kwantitatief als kwalitatief de verschillen tussen het eerste en tweede orde filter aan te tonen. De kwaliteit van de data kan nog verder verbeterd worden door elektromagnetische koppeling met de omgeving actief tegen te gaan en bijvoorbeeld lussen in de kabels te voorkomen. Daarnaast zou het gebruik van een grotere bronspanning er voor kunnen zorgen dat op metingen op hogere frequenties een kleinere relatieve onzekerheid hebben.

VI. CONCLUSIE

De spanningsoverdracht van een eerste en tweede orde RC -filter met een cut-off frequentie rond 1 kHz is experimenteel bepaald voor frequenties tussen 10 Hz en 100 kHz. Voor het eerste orde filter is de functie $V_{\text{gain}} = (1 + (2\pi f\alpha)^2)^{-1/2}$ gefit. De gevonden waarde $\alpha = (3.52 \pm 0.02) \cdot 10^{-4}$ s is niet strijdig met de verwachte waarde van $(3.53 \pm 0.09) \cdot 10^{-4}$ s op basis van de gemeten capaciteit en weerstand. Voor het tweede orde filter is $V_{\text{gain}} = ((\omega\beta)^2 + (1 - \omega^2\gamma)^2)^{-1/2}$ gefit met bijbehorende parameters $\beta = (4.18 \pm 0.02) \cdot 10^{-4}$ s en $\gamma = (2.08 \pm 0.08) \cdot 10^{-8}$ s² die niet strijdig zijn met de verwachtingen van $(4.22 \pm 0.08) \cdot 10^{-4}$ s en $(2.18 \pm 0.08) \cdot 10^{-8}$ s² op basis van de gebruikte weerstanden en condensatoren. We concluderen dat het theoretisch model de overdrachtskarakteristiek van de gebruikte RC -filters goed beschrijft en dat het tweede orde filter hoogfrequente signalen een stuk sterker onderdrukt. Bij hoge frequenties liggen de datapunten van het eerste orde filter systematisch boven de fitlijn, maar wel binnen de onzekerheid. Vervolgonderzoek moet uitwijzen of het voorspelde verband ook stand houdt bij hogere frequenties.

[1] Richard Wolfson. *Essential University Physics*, volume 2. Pearson Education India, 2009.

[2] Neil Storey. *Electronics: a systems approach*. Pearson Education, 2006.